ЕРКИНБАЕВ НУРЛАН МАХСЕТОВИЧ

Краевые задачи сопряжения для кусочно - аналитических функций и их приложения в пространствах Бесова

АННОТАЦИЯ

диссертации на соискание степени доктора философии (PhD)
по образовательной программе «8D05404-Фундаментальная и прикладная математика»

Граничные задачи в теории функций комплексного переменного представляют собой область исследований, имеющую существенное научное значение как в общей теории функций, так и в теории дифференциальных уравнений.

Актуальность исследования. В настоящей диссертационной работе граничные задачи для кусочно-аналитических функций рассматриваются впервые в рамках пространств Бесова. Эти пространства вложены в класс непрерывных функций (хотя и не являются пространствами Гёльдера), что определяет научную новизну проведённого исследования. Ранее подобные и близкие задачи изучались при условии Гёльдеровой непрерывности заданных функций.

Использование пространств Бесова позволяет переносить свойства плотности дифференциальных операторов, включая сингулярные интегралы, непосредственно на сам оператор без потери регулярности. Это, в свою очередь, дает возможность ослабить условия, обеспечивающие существование решений классических дифференциальных уравнений. Например, такие задачи для волнового уравнения были изучены в работах О. В. Бесова, а для эллиптических систем на плоскости — в трудах Н. К. Блиева.

Пусть задана система контуров

$$L = L_0 + L_1 + \ldots + L_m.$$

Предположим, что контур L_0 охватывает все остальные контуры

$$L_1, L_2, \ldots, L_m$$

усть область D^+, ограниченная данной системой контуров, представляет собой $m+1$-связную область, расположенную внутри контура L_0, но вне контуров

$$L_1, L_2, \ldots, L_m.$$

Обозначим через D^- дополнение множества $D^+ \cup L$ на всей комплексной плоскости. То есть D^- является внешним дополнительным множеством области D^+.
контурларын өз ішіне қамтиды деп ұйғарайық.

Начало координат считаем расположенным внутри области D^+. Направление обхода контуров выбираем таким образом, чтобы область D^+ оставалась слева. В соответствии с этим внешний контур L_0 ориентирован против часовой стрелки, а внутренние контуры

$$L_1, L_2, \dots, L_m$$

по часовой стрелке.

Рассматривается пространство Бесова $B^r_{p,\theta}(L)$, где параметры r, p, θ удовлетворяют одному из условий:

$$\text{(I)} \quad 1 < p < 2, \theta = 1, r = 1/p,$$

$$\text{(II)} \quad 1 < p < 2, \theta \geq 1, r > 1/p,$$

$$\text{(III)} \quad p \geq 2, \theta \geq 1, r > 1 - 1/p.$$

Также предполагается выполнение неравенства

$$r + \frac{1}{p} - 1 < \nu \leq 1,$$

и контур $L \in C^{1,\nu}$, где $C^{1,\nu}$ — класс функций с непрерывной производной, удовлетворяющей гёльдеровому условию порядка ν.

Интеграл типа Коши определяется формулой

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau + A.$$

Формулы Сохоцкого–Племеля имеют вид

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad t \in L,$$

$$\Phi^-(z) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau\,, \quad t \in L.$$

В случае (I) пространство $B_{p,1}^{1/p}(L)$ вкладывается в пространство непрерывных функций $C(L)$, вложено в пространство Гёльдера

$$H_\beta(L), \;\; 0 < \beta \; < \; 1.$$

Таким образом, в классе $B_{p,1}^{1/p}(L)$ существуют функции $\varphi(t)$, непрерывные на контуре, но не удовлетворяющие гёльдеровому условию. Для таких функций Коши-тип интеграл остаётся непрерывным в замкнутой области $\overline{D^+}$, и формулы Сохоцкого–Племеля справедливы.
Этот результат важен, поскольку в общем случае Коши-тип интеграл с произвольной непрерывной плотностью не обязан быть непрерывным в замкнутой области. Функции из класса $B_{p,1}^{1/p}(L)$ удовлетворяют гёльдеровому неравенству в L_p-норме.

В условиях (II) и (III) выполняется вложение

$$\varphi(t) \in B_{p,\theta}^{r}(L) \hookrightarrow H_\beta(L), \quad 0 < \beta \; < \; 1,$$

и в этом случае функция $\Phi(z)$, полученная с помощью интеграла Коши, принадлежит пространству $B_{p,\theta}^{1+\alpha}(D^+)$. Соответственно, её обобщённые производные принадлежат пространству $B_{p,\theta}^{\alpha}(D^+)$.

В данной работе свойства интегралов Коши в многосвязных областях исследованы в рамках пространств Бесова. Полученные результаты позволяют расширить теорию сингулярных интегральных уравнений в сложных областях и применимы в теории граничных задач математической физики.

Цель исследования. Целью диссертационной работы является установление условий разрешимости граничных задач для кусочно-аналитических функций в многосвязных областях. Эти условия рассматриваются в классе непрерывных функций и доказывается их выполнимость в пространствах Бесова. Указанные пространства образуют коммутативную алгебру, что позволяет использовать методы функционального анализа для углубленного исследования граничных задач.

Объект исследования. Граничные задачи для кусочно-аналитических функций в пространствах Бесова, вложенных в класс непрерывных функций, в многосвязных областях.

Методы исследования. Для решения граничных задач используется метод интегралов Коши-типа, позволяющий аналитически описывать решения в многосвязных областях.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая значимость работы состоит в развитии новых подходов к рассмотрению

граничных задач, для которых ранее требовалось выполнение гёльдеровых условий. В настоящей работе эти условия значительно ослаблены, что позволяет изучать задачи в более широких функциональных классах. Это ведёт к обнаружению новых свойств граничных задач и расширяет возможности их приложения.

Практическая значимость связана с применением граничных задач в моделировании широкого круга физических и инженерных процессов (гидродинамика, аэродинамика, электротехника, теория упругости). Использование пространств Бесова позволяет получать более точные решения и открывает новые перспективы в прикладных исследованиях.

Научная новизна. Основные результаты, выносимые на защиту, заключаются в разработке метода решения граничных задач в пространствах Бесова в классе непрерывных функций без требований гёльдеровой непрерывности. Доказано, что теория сингулярных интегральных уравнений с интегралами Коши-типа и теория граничных сопряжённых задач взаимосвязаны.

Впервые в пространствах Бесова получены решения однородной и неоднородной задачи Римана в многосвязной области, исследованы их свойства на бесконечности.

Апробация работы. Основные результаты диссертации были представлены и обсуждены на следующих международных конференциях:

1. International congress on fundamental and applied sciences (ICFAS), Antalya, Turkey, 19-21 October.
2. VI International scientific conference “Non-local boundary value problems and related problems of mathematical biology, informatics and physics”, December 5-9, 2021, Nalchik, Kabardino-Balkarian Republic, Russia.
3. International scientific workshop “OTHA Fall 2021”, December 13-17, 2021, Southern Federal University. Rostov-on Don, Russia.
4. International conference “Numerical functional analysis-2021” of ICAAM, November 22-24, 2021, Istanbul, Turkey.
5. Workshop on Banach Spaces and Banach Lattices II, Instituto de Ciencias Mathematicas, May 9-13, 2022, Madrid, Spain.

Достоверность и обоснованность результатов подтверждается доказательствами, согласующимися с ранее известными научными работами, публикациями в индексируемых международных журналах и материалами конференций.

Публикации:

1. N. K. Bliev and N. M. Yerkinbayev, “Riemann problem for multiply connected domain in Besov spaces,” Boundary Value Problems, vol. 2024(1), 70, p. 9, 2024. https://doi.org/10.1186/s13661-024-01883-x. (Q1)
2. N. K. Bliev and N. M. Yerkinbayev, “Boundary conjugation problem for piecewise analytic functions in Besov spaces,” Complex Variables and Elliptic Equations, vol. 69(5), pp. 849–856, 2024. https://doi.org/10.1080/17476933.2023.2164887. (Q2)

3. N. K. Bliev, K. S. Tulenov, and N. M. Yerkinbayev, “Noetherian solvability and explicit solution of a singular integral equation with weighted carleman shift in besov spaces,” Complex Variables and Elliptic Equations, vol. 68, pp. 1264–1285, 2023. https://doi.org/10.1080/17476933.2022.2045975. (Q2)

Структура диссертации. Работа состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. Общий объём — 79 страниц. Список литературы включает 35 источников.